

مرور + جمع بندی + مهندسی تست به روش

بین +۱

۱. به ازای یک مقدار x اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ و $x^2 + 4$ ، به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این

دنباله، کدام است؟

سراسری تهری - ۹۳

$\frac{127}{8}$ (۴)

$\frac{63}{4}$ (۳)

$\frac{125}{16}$ (۲)

$\frac{117}{16}$ (۱)



۹۳-۱

مبحث: دنباله و تصاعد

موضوع: تصاعد هندسی

پیش نیازها: مفهوم دنباله + قوانین مقدماتی ریاضی

نکته

۱- اگر سه جمله a ، b و c تشکیل تصاعد هندسی دهند، رابطه $b^2 = ac$ بین جملات برقرار است.

۲- اگر دنباله هندسی نزولی یا مورب باشد، قدر نسبت (q) عددی مثبت است.

۳- موضوع جملات هندسی از رابطه $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ به دست می آید. توجه کنید این فرمول ساده شده فرمول $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ است.

که چون $0 < q < 1$ (یا $-1 < q < 0$) و تعداد جملات بی شمار (نامحدود) است به رابطه $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ تبدیل می شود.



در این تست چون مجموع ۷ جمله اول خواسته شده است باید از فرمول اصلی $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ استفاده کنیم. زیرا تعداد

جملات بی شمار نیست!

۲. به ازای یک مقدار x ، اعداد $x - 8$ ، x و $x + 12$ ، به ترتیب سه جمله اول دنباله هندسی نزولی اند. حد مجموع جمله های این دنباله، کدام

«فارج از کشور تهری - ۹۳»

$\frac{27}{4}$ (۴)

$\frac{24}{3}$ (۳)

$\frac{21}{2}$ (۲)

$\frac{18}{1}$ (۱)

۳. در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آنها ۲۱۶ می باشد. تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این سه عدد

«سراسری تهری - ۹۰»

$\frac{7}{4}$ (۴)

$\frac{6}{3}$ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

$\frac{4}{1}$ (۱)

۴. در یک دنباله هندسی، جمله دوم، دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، بزرگترین این سه عدد چند برابر کوچکترین آنها است؟

«فارج از کشور تبریزی - ۹۲»

(۱) $2 + \sqrt{3}$ (۲) $5 + 2\sqrt{3}$ (۳) $5 + 4\sqrt{3}$ (۴) $7 + 4\sqrt{3}$

۵. جمله های دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

«سراسری تبریزی - ۹۲»

(۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{7}{3}$

۶. در دو دنباله حسابی به صورت $\{2, 5, 8, \dots\}$ ، $\{3, 7, 11, \dots\}$ مجموع اعداد مشترک دو دنباله که در بازه $(100, 200)$ قرار دارند، کدام است؟

«خلم پی - فردر - ۹۵»

(۱) ۹۶۸ (۲) ۱۲۰۰ (۳) ۱۱۹۲ (۴) ۱۲۰۲

۷. نمودار تابع $y = |\frac{1}{4}x| - 2$ را $y = 4$ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می دهیم، نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع اند؟

«سراسری تبریزی - ۹۳»

(۱) $-3/5$ (۲) -3 (۳) $-2/5$ (۴) -2

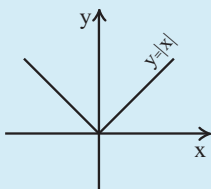


مبحث: رسم نمودار به کمک انتقال + تلاقی دو نمودار

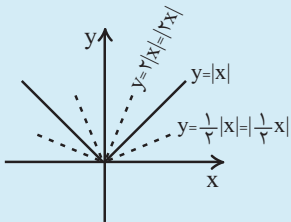
موضوع: انتقال نمودار شامل قدر مطلق

پیش نیازها: رسم نمودار تابع خطی + حل معادله

نکته



۱- نمودار $y = |x - a| + b$ انتقال یافته نمودار $y = |x|$ است. در واقع نمودار $y = |x|$ به صورت شکل روبه رو است. اگر $a > 0$ باشد به اندازه a واحد به سمت راست و اگر $a < 0$ باشد، اندازه a واحد به سمت چپ منتقل می شود. همچنین اگر $b > 0$ باشد به اندازه b واحد به سمت بالا و اگر $b < 0$ باشد به اندازه b واحد به سمت پایین محور y ها منتقل می شود.



۲- اگر نمودار به صورت $y = c|x|$ یا $y = |cx|$ باشد، در صورتی که $|c| > 1$ باشد، دهانه قدر مطلق بازتر می شود. و $|c| < 1$ باشد، دهانه قدر مطلق تنگتر می شود.

۳- برای یافتن نقاط تلاقی توابع $f(x)$ و $g(x)$ باید ضابطه آنها را با هم برابر قرار دهیم. زیرا در نقاط تلاقی، هر دو تابع دارای x و y های برابر هستند. لذا از معادله $f(x) = g(x)$ طول نقاط تقاطع را به دست می آوریم.

۸. نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیر منفی باشد؟

«فارج از کشور تبریزی - ۹۳»

(۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) $2/3$ (۴) $3/4$

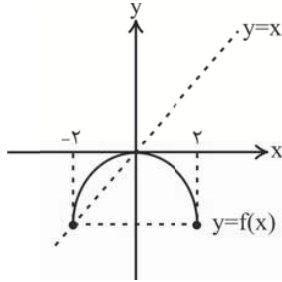
پرسش‌های چهارگزینه‌ای ریاضی ۹۳

۹. نمودار تابع به معادله $y = |x^2 - x|$ در بازه (a, b) زیر خط $y = 3$ قرار دارد. بیش‌ترین مقدار $b - a$ چقدر است؟ «قلم‌پی - فروردین ۹۴»

- (۱) ۴ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{10}$

«قلم‌پی - فروردین ۹۴»

۱۰. اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(-x) + x}$ کدام است؟



(۱) $[-2, 0]$

(۲) $[0, 2]$

(۳) $[0, 2] \cup \{-2\}$

(۴) $[-2, 0] \cup \{2\}$

«گزینه‌رو - بهمن ۹۴»

۱۱. در معادله تعریف شده $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} = \frac{1}{a+4x}$ ، نسبت $\frac{a}{x}$ کدام می‌تواند باشد؟ ($x \neq 0$)

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

«قلم‌پی - آذر ۹۵»

۱۲. نامعادله $|\frac{1-2x}{2x+3}| > 1$ در کدام بازه زیر برقرار است؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, 0)$ (۲) $(-2, -\frac{1}{2})$ (۳) $(-\infty, -\frac{1}{2})$ (۴) $(-\infty, -2]$

۱۳. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر $A \times B$ ماتریس واحد باشد، مجموع درایه‌های سطر اول ماتریس B کدام است؟

«سراسری تهرانی - ۹۳»

- (۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) $2/5$



مبحث: ماتریس

موضوع: ماتریس وارون

پیش‌نیازها: ضرب دو ماتریس + ماتریس واحد + دترمینان + شرط وارون‌پذیری ماتریس

نکته

۱- در ماتریس $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ را می‌توان به صورت $A \times B$ نوشت، هرگاه $n = p$. یعنی تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد. حاصل ماتریس $A \times B$ از مرتبه $m \times q$ است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 \\ -1 \times 4 + 0 \times 5 + 1 \times 6 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 32 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

← مرتبه ماتریس جدید

۲- ماتریس مربعی که همگی درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و سایر درایه‌های آن صفر است ماتریس واحد نام دارد.

ماتریس واحد از مرتبه ۲ به صورت $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و از مرتبه ۳ به صورت $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ است.

۳- دترمینان ماتریس مربعی از مرتبه دو $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت زیر است:

$$|A| = a \times d - b \times c$$

۴- شرط وارون‌پذیری ماتریس مربعی از مرتبه ۲ آن است که دترمینان ماتریس A مخالف صفر باشد. یعنی:

$$|A| \neq 0$$

۵- وارون ماتریس مربعی A که از مرتبه ۲ است، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ و } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*$$

ماتریس A^* ، ماتریس تغییر یافته A است که در آن جای درایه‌های قطر اصلی تغییر می‌کند و درایه‌های روی قطر فرعی قرینه می‌شوند.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

پس:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^* = \frac{1}{a \times d - b \times c} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۱۴. دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. درایه واقع در سطر اول و ستون اول وارون ماتریس $B \times A$ ، کدام است؟

«فارج از کشور تهری - ۹۳»

۴) ۰/۹

۳) ۰/۱

۲) -۰/۱

۱) -۰/۹

«سراسری تهری - ۹۱»

۱۵. اگر $X + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد وارون ماتریس X کدام است؟

۴) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

۱) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

«فارج از کشور تهری - ۹۱»

۱۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس B از معادله $A \cdot B = 2I$ کدام است؟

۴) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

۱۷. در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - 3y = 7 \\ bx - 4y = 2 \end{cases}$ اگر دترمینان ماتریس ضرایب مجهولات برابر ۱۷ باشد، مقدار X کدام است؟ «تلفی»

۴) -۲

۳) ۲

۲) -۱

۱) ۱

«تلفی»

۱۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $(2A) \cdot (3A^{-1})$ کدام است؟

۴) ۳۶

۳) ۱۸

۲) ۱۶

۱) ۱۲

۱۹. در یک شرکت دارویی جدول توزیع کارکنان را با نمودار دایره‌ای نشان می‌دهیم. زاویه مربوط به کارکنان ارشد، چنددرجه است؟

سراسری تهرانی - ۹۳

نوع مدرک	دیپلم	کاردانی	کارشناسی	کارشناسی ارشد	دکترا
تعداد	۳۰	۹۰	۱۸۰	۱۲۰	۳۰

(۱) ۸۴°

(۲) ۹۲°

(۳) ۹۶°

(۴) ۱۰۵°



مبحث: آمار و مدل‌سازی

موضوع: جدول فراوانی و دسته‌بندی داده‌ها

پیش‌نیازها: مفاهیم آماری

نکته

۱- فراوانی مطلق: تعداد اعضای دسته i ام در جدول فراوانی را فراوانی مطلق دسته i ام می‌نامیم و آن را با f_i نشان می‌دهیم.

۲- فراوانی کل (حجم جامعه): به تعداد کل داده‌ها یا مجموع کل فراوانی‌ها، حجم جامعه یا فراوانی کل می‌گوییم و آن را با N (یا n) نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$N = \sum_{i=1}^k f_i$$

۳- فراوانی نسبی: فراوانی نسبی دسته i ام همان نسبت فراوانی مطلق دسته i ام به تعداد کل داده‌هاست:

به عبارتی:

$$\text{فراوانی نسبی مطلق دسته } i\text{ام} = \frac{f_i}{N} \Rightarrow \bar{f}_i = \frac{f_i}{N}$$

۴- درصد فراوانی نسبی: درصد فراوانی نسبی را با p_i نمایش می‌دهیم که از رابطه زیر به دست می‌آید:

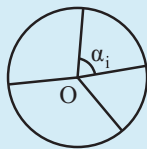
$$p_i = \bar{f}_i \times 100 = \frac{f_i}{n} \times 100$$

۵- در هر جدول فراوانی مجموع فراوانی‌های نسبی برابر یک و مجموع درصد فراوانی‌های نسبی برابر ۱۰۰ است.

۶- یکی از نمودارهایی که می‌تواند اطلاعات موجود در داده‌ها را به سرعت در معرض دید قرار دهد، نمودار دایره‌ای است.

دایره به چند قطاع تقسیم می‌شود و مساحت هر قطاع متناسب است با فراوانی نسبی یک داده یا یک دسته از داده‌ها.

زاویه مرکزی هر قطاع از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\alpha_i = \bar{f}_i \times 360^\circ = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$$

$$\alpha_i = \bar{f}_i \times 100 = \frac{f_i}{n} \times 100$$

۲۰. نمودار ساقه و برگ روبه‌رو، درصد نمرات قبولی یک کلاس است. اگر این نمرات به ۵ گروه دسته‌بندی شوند. در نمودار میله‌ای فراوانی نسبی، بلندی میله نظیر داده ۷۷/۵، کدام است؟

«فارج کشور از تهرانی - ۹۳»

ساقه	برگ				
۶	۰	۲	۴	۷	۹
۷	۲	۳	۳	۵	۶
۸	۱	۴	۵	۵	۸
۹	۰	۱	۳	۳	۵

(۱) ۰/۱

(۲) ۰/۱۵

(۳) ۰/۲

(۴) ۰/۲۵

«سراسری تهری - ۹۱»

X	۱۱۰	۱۱۶	۱۲۲	۱۲۸	۱۳۴
F	۵	۸	۱۵	۱۲	۱۰

۲۱. میانگین ۵۰ داده دسته‌بندی شده زیر با روش سریع کدام است؟

- ۱) $123/62$
- ۲) $123/68$
- ۳) $124/02$
- ۴) $124/06$

«سراسری تهری - ۹۲»

مرکز دسته	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
فراوانی تجمعی	۸	۲۴	۴۴	۶۸	۸۰

۲۲. در جدول فراوانی تجمعی زیر میانگین داده‌ها، کدام است؟

- ۱) $9/2$
- ۲) $9/3$
- ۳) $9/4$
- ۴) $9/5$

«فارج از کشور تهری - ۹۳»

حدود دسته	۱۳-۱۷	۱۷-۲۱	۲۱-۲۵	۲۵-۲۹	۲۹-۳۳
فراوانی	۸	۲۴	۴۴	۶۸	۸۰

۲۳. در جدول فراوانی مطلق، میانگین داده‌ها، کدام است؟

- ۱) $21/4$
- ۲) $21/6$
- ۳) $21/7$
- ۴) $21/8$

«فارج از کشور تهری - ۹۱»

مرکز دسته	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱
درصد فراوانی نسبی	۱۵	۲۰	۲۵	a

۲۴. داده‌های آماری در ۴ دسته با درصد فراوانی نسبی آنها بیان شده است میانگین این داده‌ها کدام است؟

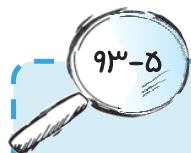
- ۱) $16/5$
- ۲) $16/8$
- ۳) 14
- ۴) $17/1$

۲۵. در ۲۵ داده آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد. اگر داده‌های ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰، از بین آن‌ها حذف شوند،

«سراسری تهری - ۹۳»

واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

- ۱) $14/72$
- ۲) $14/81$
- ۳) $15/33$
- ۴) $16/66$



مبحث: آمار و مدل سازی

موضوع: شاخص‌های پراکندگی (واریانس)

پیش نیازها: مفاهیم و تعاریف آماری + میانگین

نکته

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

۱- میانگین n داده آماری برابر است با:

۲- برای محاسبه میانگین در جدول فراوانی اگر مرکز دسته‌ها را با x_i و فراوانی دسته‌ها را با f_i نمایش دهیم، آنگاه:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

- ۳- در داده‌های آماری همواره $X_{\min} \leq \bar{X} \leq X_{\max}$ و میانگین در هر جامعه آماری منحصر به فرد است.
- ۴- اگر داده‌های آماری به صورت دنباله حسابی باشند، میانه و میانگین با هم برابر بوده و برابر نصف مجموع جملات اول و آخر آن می‌باشد. یعنی: $\bar{X} = \frac{X_1 + X_n}{2}$.
- ۵- اگر عدد ثابت b به تمامی داده‌ها اضافه شود، میانگین داده‌های جدید از میانگین داده‌های قبلی b واحد بیشتر است.
- ۶- اگر تمامی داده‌ها در عدد ثابت a ضرب شوند، میانگین داده‌های جدید a برابر میانگین داده‌های قبلی است.
- نتیجه:** اگر میانگین داده‌های X_1, X_2, \dots, X_n برابر \bar{X} باشد، آن‌گاه میانگین داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر با $a\bar{X} + b$ است.
- ۷- **واریانس:** واریانس برابر است با میانگین مجذور انحراف از میانگین، یعنی:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

۸- هرگاه در مسئله‌ای مجموع مربعات داده‌ها را داده باشند، برای محاسبه واریانس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

۲۶. میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می‌باشد. اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

«فارج از کشور تهری - ۹۳»

۹/۶۳ (۴)

۹/۵۲ (۳)

۹/۳۶ (۲)

۹/۲۵ (۱)

۲۷. میانگین محیط مربع‌هایی برابر ۸۴ و میانگین مساحت این مربع‌ها ۴۹۰ می‌باشند. ضریب تغییرات در طول ضلع این مربع‌ها، کدام است؟

«فارج از کشور تهری - ۹۲»

۰/۳۳ (۴)

۰/۲۸ (۳)

۰/۲۷ (۲)

۰/۲۵ (۱)

۲۸. در ۱۵۰ داده آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هریک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم. تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟

«سراسری تهری - ۹۲»

$\frac{8}{9}$ (۴)

$\frac{7}{8}$ (۳)

$\frac{5}{6}$ (۲)

$\frac{7}{9}$ (۱)

۲۹. با توجه به جدول روبه‌رو، واریانس داده‌ها کدام است؟

X	۲	۶	۱۰	۱۶
فراوانی نسبی	۰/۲	۰/۲۵	۰/۴۵	۰/۱

۱۶/۴ (۱)

۱۴/۸ (۲)

۱۵/۶ (۳)

۱۷/۲ (۴)

۳۰. اگر از هریک از داده‌های آماری متمایز، ۷ واحد کم کنیم، ضریب تغییرات آن‌ها دو برابر می‌شود. میانگین داده‌های اولیه کدام است؟

«قلم‌پی - بومن ۹۵»

۱۴ (۴)

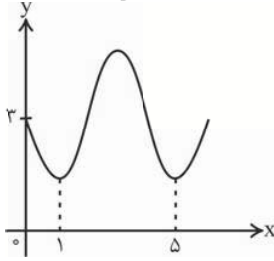
۱۳ (۳)

۹ (۲)

۷ (۱)

سراسری تهری - ۹۳

۳۱. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(h\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ ، کدام است؟



- ۲ (۱)
- ۲/۵ (۲)
- ۳ (۳)
- ۳/۵ (۴)

۹۳-۶

مبحث: مثلثات

موضوع: دوره تناوب

پیش‌نیازها: کمترین و بیشترین مقدار توابع مثلثاتی + دوره تناوب توابع

نکته

۱- برد تابع مثلثاتی به فرم $y = a \sin(bx + c)$ به صورت $[-a, a]$ است. در صورتی که تابع به فرم $y = a \sin(bx + c) + d$ درآید برد آن به صورت $[-a + d, a + d]$ نوشته می‌شود. پس:

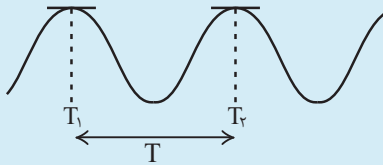
$$y = a \sin(bx + c) \Rightarrow \begin{cases} \text{بیشترین مقدار: } y_{\max} = a \\ \text{کمترین مقدار: } y_{\min} = -a \end{cases}$$

$$y = a \sin(bx + c) + d \Rightarrow \begin{cases} \text{بیشترین مقدار: } y_{\max} = a + d \\ \text{کمترین مقدار: } y_{\min} = -a + d \end{cases}$$



نکته فوق درباره تابع مثلثاتی به فرم $y = a \cos(bx + c)$ نیز صدق می‌کند.

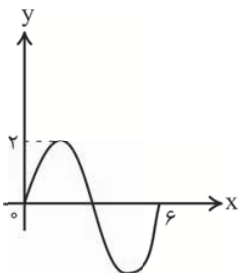
۲- دوره تناوب اصلی توابع مثلثاتی به فرم $y = a \sin(bx + c)$ و $y = a \cos(bx + c)$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.



۳- در نمودارهای توابع مثلثاتی فاصله بین دو قله (دو مقدار max) متوالی یا دو دره (دو مقدار min) متوالی همان دوره تناوب اصلی تابع است.

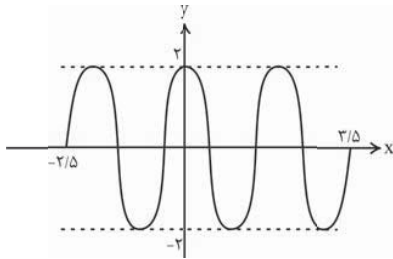
«فارج از کشور تهری - ۹۳»

۳۲. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟



- ۴/۳ (۱)
- ۵/۳ (۲)
- ۷/۳ (۳)
- ۸/۳ (۴)

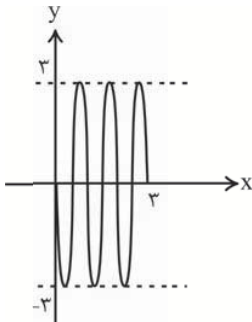
«سراسری ریاضی - ۹۳»



۳۳. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi \left(\frac{1}{4} + bx \right)$ است. کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۲/۵
- (۳) ۳
- (۴) ۳/۵

«فارج از کشور ریاضی - ۹۳»



۳۴. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b \pi x)$ است. کدام است؟

- (۱) -۶
- (۲) -۳
- (۳) ۴/۵
- (۴) ۶

«قلم‌پی - آزر ۹۵»

(۴) $\frac{\pi}{4}$

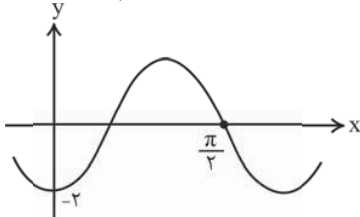
(۳) $\frac{\pi}{2}$

(۲) π

(۱) 2π

۳۵. دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ کدام است؟

«قلم‌پی - بعین ۹۵»



۳۶. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx + \frac{\pi}{4})$ است، مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $2\sqrt{2}$
- (۳) $-\sqrt{2}$
- (۴) $-2\sqrt{2}$

«سراسری تبری - ۹۳»

(۴) $\frac{2}{9}$

۳۷. اگر $\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

(۳) $\frac{1}{9}$

(۲) $-\frac{1}{9}$

(۱) $\frac{2}{9}$



مبحث: مثلثات

موضوع: اتحادهای مثلثاتی

پیش‌نیازها: روابط مثلثاتی + اتحادهای مقدماتی

نکته

اتحادهای مثلثاتی $(\alpha \pm \beta)$:

الف) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

ب) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$

ج) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \times \tan \beta}$

نسبت‌های مثلثاتی 2α :

الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

ب) $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$

ج) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

«فارج از کشور تبریزی - ۹۳»

۳۸. اگر $\tan \alpha = 2$ و $\tan \beta = \frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\tan(2\alpha - \beta)$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -2 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 3

۳۹. در مثلث ABC با معلوم بودن ضلع $BC = 3 + \sqrt{3}$ و زاویه‌های $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 45^\circ$ ، اندازه ضلع AC، کدام است؟ «فارج از کشور ریاضی - ۹۳»

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۴۰. مساحت مثلث ABC برابر $2\sqrt{3}$ است، اگر $BC = 2\sqrt{3}$ و $AC = 4$ و زاویه حاده باشد، اندازه زاویه B کدام است؟ «قلم‌پی - آزر - ۹۵»

- (۱) 90° (۲) 135° (۳) 120° (۴) 30°

۴۱. مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = 8$ و $c = 5$ باشد، اندازه ضلع متوسط a کدام است؟ «فارج از کشور تبریزی - ۹۲»

- (۱) $\sqrt{39}$ (۲) $\sqrt{41}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{2}$

«قلم‌پی - دی - ۹۵»

۴۲. حاصل عبارت $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\sqrt{3}$

۴۳. از تساوی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ ، مجموع تمام جواب‌ها در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟ «سراسری تبریزی - ۹۳»

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{5\pi}{4}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{7\pi}{4}$

۹۳-۸

مبحث: مثلثات

موضوع: معادلات مثلثاتی

پیش‌نیازها: اتحادهای مثلثاتی - اتحادها و تجزیه عبارت‌های جبری

نکته

۱- از اتحادهای مثلثاتی زوایای $(\alpha \pm \beta)$ داریم:

الف) $\sqrt{2} \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \pm \cos x$

ب) $\sqrt{2} \cos\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \mp \sin x$

ج) $\cos \alpha \times \cos \beta - \sin \alpha \times \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$

۲- همچنین $\cos(\alpha + \beta)$ برابر است با:

۳- جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی به فرم $\cos x = \cos \alpha$ برابر است با:

$$x = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

۴- جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی به فرم $\sin x = \sin \alpha$ برابر است با:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

۵- جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی به فرم $\tan x = \tan \alpha$ و $\cot x = \cot \alpha$ برابر است با:

$$x = k\pi \pm \alpha \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$


۶- در حالت خاص اگر:

الف) $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

ب) $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

ج) $\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

د) $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

معادلات $\sin x = \pm 1$ و $\cos x = \pm 1$ دارای ریشهٔ مضاعف هستند. 

«فارج از کشور تبریزی - ۹۳»

۴۴. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟

(۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

(۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

«فارج از کشور تبریزی - ۹۲»

۴۵. مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin \Delta x + \sin \epsilon x = 1 + \cos \pi$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(۴) 11π

(۳) 10π

(۲) 9π

(۱) 8π

«فارج از کشور ریاضی - ۹۳»

۴۶. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin \epsilon x \cos 2x = \cos^2(x - \frac{\pi}{4})$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$

(۳) $\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$

(۲) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$

(۱) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$

«سراسری ریاضی - ۹۲»

۴۷. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ ، کدام است؟

(۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

(۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

(۲) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

(۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

«فارج از کشور ریاضی - ۹۲»

۴۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ ، کدام می‌باشد؟

(۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۳) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

(۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۱) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۴۹. به‌ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می‌باشد؟ ۹۳

(۴) 1 و $\frac{9}{5}$

(۳) 1 و $-\frac{9}{5}$

(۲) 1

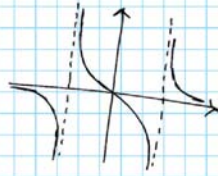
(۱) $-\frac{9}{5}$

A series of horizontal dotted lines for writing, starting from the line below the header and extending to the bottom of the page.



$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$



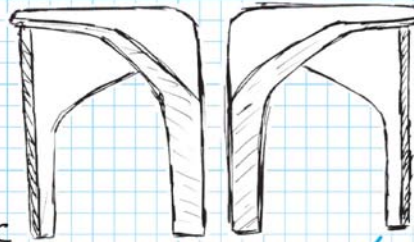
$$\cot \frac{\theta}{2} = \csc \theta + \cot \theta$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}}$$

$$= \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

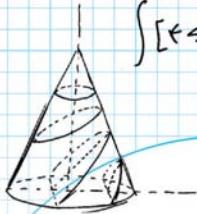
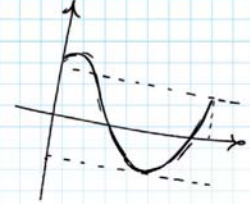
$$\int [g(x)f'(x)] dx = f(x)g(x) - \int [g'(x)f(x)] dx + C$$



$$y = f(x) = mx + b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ma + b$$

$$\int [f \sin x] dx = f \int \sin x dx + C$$



پاسخنامه تشریحی آزمون ۹۳

۱.

اگر سه جمله a ، b و c تشکیل تصاعد هندسی دهند، رابطه $b^2 = ac$ بین جملات دنباله هندسی برقرار است. پس:

$$(2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2)$$

با ساده کردن معادله اخیر داریم: $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ با تجزیه معادله به صورت $(x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$ خواهیم داشت:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ و } x = -2$$

جواب $x = -2$ غیر قابل قبول است زیرا در سؤال گفته شده که دنباله هندسی نزولی است. با انتخاب $x = 2$ جملات دنباله عبارتند از: ۲ و ۴ و

۸، در نتیجه $q_1 = 8$ و $q = \frac{1}{2}$ ، حالا از رابطه $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ مجموع ۷ جمله اول دنباله هندسی را می یابیم:

$$S_7 = \frac{8 \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{127}{8}$$

۲.

همانند سؤال قبل و از رابطه $b^2 = ac$ خواهیم داشت:

$$x^2 = (12 + x)(8 - x)$$

$$2x^2 + 4x - 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \Rightarrow \text{قابل قبول} \\ x = -8 \Rightarrow \text{غ ق ق غ} \end{cases}$$

چون دنباله هندسی نزولی نمی شود \Rightarrow غ ق ق غ

پس جملات دنباله به صورت $18, 6, 2, \dots$ درمی آیند.

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{18}{1 - \frac{1}{3}} = 27$$

حد مجموع جملات

۳.

اگر جملات دنباله هندسی را به ترتیب a_1 و a_1q و a_1q^2 در نظر بگیریم، طبق گفته مسئله داریم:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 19 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \times a_1q \times a_1q^2 = 216 \Rightarrow (a_1q)^3 = 216 \Rightarrow a_1q = 6 & (2) \end{cases}$$

از روابط (۱) و (۲):

$$a_1 + 6 + 6q = 19 \quad (3)$$

از طرفی، از رابطه (۲) نتیجه می گیریم $q = \frac{6}{a_1}$. با ترکیب رابطه اخیر با رابطه (۳) داریم:

$$a_1 + 6 + \frac{36}{a_1} = 19 \xrightarrow{\times(a_1)} a_1^2 - 13a_1 + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \Rightarrow q = \frac{3}{2} \\ a_1 = 9 \Rightarrow q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

پس جملات دنباله به صورت ۴، ۶ و ۹ یا به صورت ۶، ۹ و ۴ در می آیند که در هر حالت اختلاف کوچکترین و بزرگترین این ۳ عدد برابر ۵ است.

۴.    

اگر a ، b و c سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند رابطه $2b = a + c$ بین آنها برقرار است. جمله دوم، دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند. پس داریم:

$$a_7 + a_8 = 2(a_5) \Rightarrow a_7 + (a_7 q^2) = 4(a_7 q^3) \Rightarrow \cancel{a_7} (1 + q^2) = 4 \cancel{a_7} q^3$$

$$q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \xrightarrow{q^3=t} t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} = q^3$$

حال با معلوم بودن q^3 نسبت بزرگترین این سه عدد (یعنی a_8) به کوچکترین آن ها (یعنی a_7) برابر است با:

$$\frac{a_8}{a_7} = q^{8-7} = q^1 = q = (q^3)^{\frac{1}{3}} = (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = 4 + 3 + 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3}$$

۵.    

روش اول: به ترتیب، جملات دوم و پنجم و دوازدهم دنباله حسابی را می نویسیم:

$$a_7 = a_1 + d \quad a_5 = a_1 + 4d \quad a_{12} = a_1 + 11d$$

از طرفی این سه جمله باید، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، پس باید رابطه $b^2 = ac$ بین سه جمله متوالی a ، b و c یک دنباله هندسی برقرار باشد.

$$a_5^2 = a_7 \times a_{12} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 11d)$$

$$a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2 \Rightarrow 4a_1d = 5d^2 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{4}d$$

حالا چون a_7 و a_5 و a_{12} باید دنباله هندسی تشکیل دهند، قدر نسبت برابر است با:

$$q = \frac{a_5}{a_7} = \frac{a_{12}}{a_5}$$

$$q = \frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = \frac{\frac{5}{4}d + 4d}{\frac{5}{4}d + d} = \frac{\frac{5}{4}d + 4d}{\frac{5}{4}d + d} = \frac{5d + 16d}{5d + 4d} = \frac{21d}{9d} = \frac{7}{3}$$

روش دوم: یک روش سریع تر و تستی برای این گونه سوالات چنین است که بگوییم: چون سه جمله a_7 ، a_5 و a_{12} باید تشکیل تصاعد هندسی

دهند، فاصله جمله دوم و پنجم را ۳ و فاصله جمله پنجم و دوازدهم را ۷ در نظر بگیریم و برای یافتن q ، عدد ۷ را بر عدد ۳ تقسیم کنیم: $q = \frac{7}{3}$

مثال جملات سوم و هفتم و پانزدهم یک تصاعد حسابی، سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی را تشکیل می دهند. قدر نسبت تصاعد هندسی را بیابید.

$$q = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

حل: فاصله جمله سوم و هفتم را ۴ و فاصله جمله هفتم و پانزدهم را ۸ در نظر می گیریم، پس:

۶.    

ابتدا چند جمله هر دو تصاعد را می نویسیم تا جملات مشترک را بیابیم:

$$\begin{cases} 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \dots \\ 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, \dots \end{cases}$$